SECRETARÍA DE EDUCACIÓN JALISCO

COORDINACIÓN DE EDUCACIÓN BÁSICA

SEGUNDA OLIMPIADA ESTATAL DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

2a OEMEPS 2011

PROBLEMARIO

SECUNDARIA

Dirección de Programas de Acompañamiento Pedagógico

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN JALISCO

Directorio

José Antonio Gloria Morales
Secretario de Educación Jalisco

Pedro Díaz Arias
Coordinador de Educación Básica

Salvador Rodríguez Lizola
Director General de Educación Secundaria

Gilberto Tinajero Díaz
Director General de Programas Estratégicos

Miguel Ángel Casillas Cerna
Director de Programas de Acompañamiento Pedagógico

Comité Organizador de la Olimpiada

Miguel Ángel Casillas Cerna	Director de Programas de Acompañamiento Pedagógico
Silvia Esthela Rivera Alcalá	Dirección de Programas de Acompañamiento Pedagógico
Ana María Díaz Castillo	Dirección General de Programas Estratégicos
Luis Alejandro Rodríguez Aceves	Dirección de Programas de Acompañamiento Pedagógico
Luis Miguel Ramírez Pulido	Dirección de Programas de Acompañamiento Pedagógico
Olga Godínez Guzmán	Dirección General de Secundarias Generales
Juan José Álvarez López	Dirección de Secundarias Técnicas
Giovanni Rico López	Dirección de Telesecundarias
Santos Arreguin Rangel	Dirección General de Educación Primaria
Liliana Lizette López Bazcón	Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas

Guadalajara, Jalisco, febrero de 2011

Índice

Presentación

La Secretaría de Educación Jalisco a través de la Coordinación de Educación Básica, con el propósito de promover el desarrollo de las competencias matemáticas y favorecer el gusto y el interés por las matemáticas en los alumnos de las escuelas primarias y secundarias de la entidad, convoca a la Segunda Olimpiada Estatal de Matemáticas en Educación Primaria y Secundaria 2011 (2a OEMEPS).

La Olimpiada Estatal de Matemáticas en Educación Primaria y Secundaria, es un concurso en el que los alumnos de quinto y sexto grados de primaria y de los tres grados de secundaria, asesorados por sus profesores resolverán en un lapso de tiempo suficiente, problemas que implican razonamiento y creatividad, a la vez que muestran su nivel de desarrollo en las competencias de resolución de problemas de manera autónoma, comunicación de información matemática, validación de procedimientos y resultados, manejo de técnicas con eficiencia, así como es considerado en el Perfil de Egreso de Educación Básica:

> *Competencias para el manejo de la información.* Se relacionan con: la búsqueda, evaluación y sistematización de información; el pensar, reflexionar, argumentar y expresar juicios críticos; analizar, sintetizar y utilizar información; el conocimiento y manejo de distintas lógicas de construcción del conocimiento en diversas disciplinas y en los distintos ámbitos culturales.
> *Plan de Estudios 2006. Secundaria*. México: SEP. Págs. 9-12.

Los alumnos participantes escribirán sus procedimientos de solución y los jueces asignarán puntos según el avance logrado en sus respuestas. Esta jornada de trabajo intenso necesariamente dejará aprendizajes de gran valor a los alumnos y así como desarrollará competencias profesionales a los docentes, como lo refiere Philippe Perrenoud, en el documento denominado *Diez Nuevas Competencias para Enseñar*:

> *Organizar y animar situaciones de aprendizaje.* Se relacionan con: el conocer a través de una disciplina determinada, los contenidos que hay que enseñar y su traducción en objetivos de aprendizaje; trabajar a partir de las representaciones de los alumnos; trabajar a partir de los errores y los obstáculos en el aprendizaje; construir y planificar dispositivos y secuencias didácticas e implicar a los alumnos en actividades de investigación, en proyectos de conocimiento. Philippe Perrenoud. Col. Biblioteca de aula, 196. Ed. Graó. Barcelona, 2007 (5ª edición)

Los estudiantes podrán participar en la categoría y en las etapas que les correspondan de acuerdo con las bases establecidas en la convocatoria respectiva. Pensando en apoyar a los profesores en la preparación de sus estudiantes, que participarán en los distintos momentos de la Olimpiada, se ha elaborado este problemario, en el que se proponen problemas similares a los que los alumnos enfrentarán en cada una de las tres etapas del concurso. Es importante que el maestro dedique un tiempo exclusivo para el trabajo con los alumnos usando el problemario. Se recomienda destinar al menos una hora a la semana. La metodología de trabajo sugerida es la misma que se propone en los programas oficiales de la SEP del 2009, correspondientes a Matemáticas.

En un ambiente de confianza creado por el maestro, los alumnos deberán abordar los problemas con las herramientas personales de que disponen e intentar encontrar en cada problema al menos una solución, para confrontar posteriormente con el resto de sus compañeros los resultados a los que lleguen, justificando y argumentando paso a paso cada una de las respuestas dadas a los cuestionamientos que se les plantean. Con la finalidad de favorecer la consistencia y claridad en la argumentación que hagan los alumnos, es importante que el profesor les solicite escribir todas las ideas que se les ocurran durante el proceso de resolución, independientemente de si los llevaron o no a la solución final.

El profesor previamente deberá resolver los problemas que propondrá en la sesión de trabajo o revisar las soluciones que se proponen en este problemario y presentar al menos una solución en el caso de que los alumnos no logren encontrar alguna. Además, es necesario que durante la confrontación de soluciones, organice los diferentes resultados a los que arriben sus estudiantes, aproveche el momento para hacer las precisiones convenientes en cuanto a conceptos, definiciones o repaso de algoritmos que hayan sido necesarios en la resolución o hayan representado alguna dificultad para los estudiantes.

Algunos de los problemas incluidos en este cuadernillo formaron parte de los exámenes aplicados en las distintas etapas de la Primera Olimpiada Estatal de Matemáticas de Educación Primaria y Secundaria, en el ciclo escolar 2009 - 2010, mismos que a su vez fueron tomados principalmente de los Calendarios Matemáticos 2007 - 2008 y 2009 - 2010, de boletines “Un reto más” y de algunos exámenes y problemarios de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM), Delegación Jalisco.

En la selección y edición de los problemas participaron: María Eugenia Guzmán Flores, Julio Rodríguez Hernández, César Octavio Pérez Carrizales, Christa Alejandra Amezcua Eccius, José Javier Gutiérrez Pineda, Pedro Javier Bobadilla Torres, Pablo Alberto Macías Martínez, Luis Miguel Ramírez Pulido y Luis Alejandro Rodríguez Aceves.

INSTRUCTIVO DE PROCEDIMIENTOS

a. El examen que se aplicará en cada una de las etapas consta de cinco problemas el cual se podrá resolver hasta en cuatro horas.

b. Cada problema tendrá un valor de 7 puntos, distribuidos de la siguiente manera: dos puntos por el resultado correcto del problema y hasta cinco puntos más por los procedimientos de solución utilizados. Estos cinco puntos se asignarán de acuerdo con el grado de desarrollo de las competencias matemáticas (resolución de problemas, argumentación, comunicación y manejo de técnicas) mostrado en sus procedimientos de solución y tomando como base los criterios de evaluación de cada problema del examen, mismos que serán definidos antes de la aplicación.

c. Como identificador de cada examen sólo se utilizará la clave de participación del alumno que lo resuelve, asignada en su ficha de inscripción. Los evaluadores no deben conocer la identidad del alumno que se evalúa.

d. Los problemas del examen deberán ser evaluados por un jurado integrado al menos por cinco profesores destacados de la asignatura.

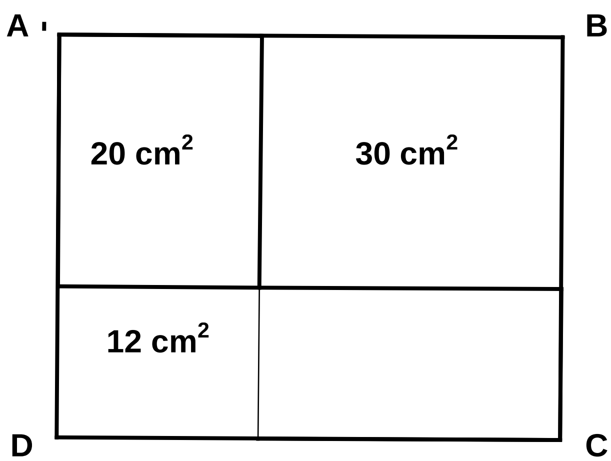
e. Cada uno de los miembros del jurado evaluará un máximo de dos problemas y cada problema deberá ser evaluado al menos por dos jueces. Por ejemplo si se dispone del mínimo de jueces (5) y los llamamos A, B, C, D y E, los cinco problemas del examen pueden ser evaluados así: juez A: problemas 1 y 2; juez B: problemas 2 y 3; juez C: problemas 3 y 4; juez D: problemas 4 y 5 y juez E: problemas 5 y 1.

Problemas

1. Usando un reloj de arena de siete minutos y otro de once minutos ¿Cuál es la manera más sencilla de medir quince minutos necesarios para hervir un huevo?

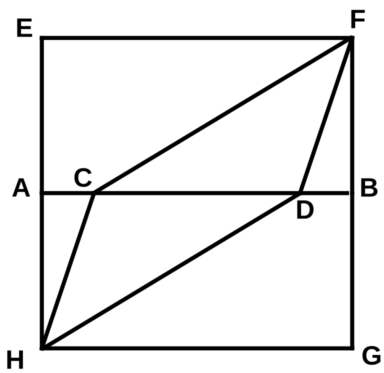
2. Cinco niños juegan a las escondidas en el patio de su escuela, cuatro se esconden y otro los busca. En ese patio hay sólo 3 escondites, los que diario usan: atrás del árbol, atrás del bote de basura y bajo la banca (en donde caben dos niños), Les toca esconderse a Ana, Beto, Carlos y David. ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir en los escondites?

3. Un rectángulo **ABCD** es dividido en cuatro rectángulos como se muestra en la figura. Las áreas de tres de ellos son las que están escritas dentro (no se conoce el área del cuarto rectángulo), ¿Cuánto mide el área del rectángulo **ABCD**?



4. ¿Cuánto es la suma de las cifras del número **N**=10^{92} - 92?

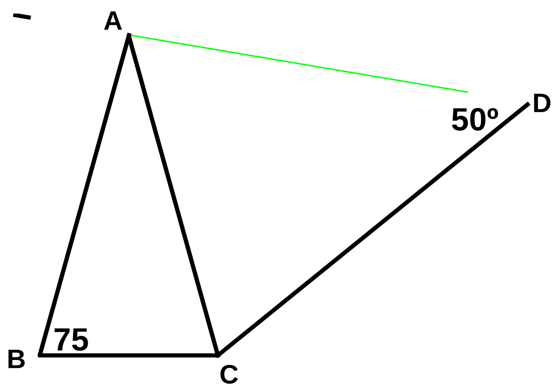
5. En la figura se muestra un cuadrado de lado 6, donde **A** y **B** son los puntos medios de dos de sus lados. Sabiendo que el área de **CFDH** es la tercera parte del área del cuadrado, ¿cuánto mide **CD**?



6. Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando canicas del costal. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color? (en el costal hay más de 100 canicas de cada uno de los 20 colores).

7. Se escriben 2006 dígitos en una sola línea con la siguiente característica: cada par de dígitos adyacentes en la línea, tomados en el orden en que están escritos, forman un número divisible siempre o por 17, ó por 23. Si 8 es el último de los 2006 dígitos. ¿Cuáles son los primeros cinco dígitos de la lista?

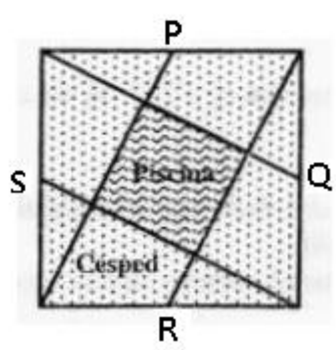
8. En la siguiente figura **AD = DC, AB = AC**, el ángulo **ABC** mide **75°** y el ángulo **ADC** mide **50°**. ¿Cuánto mide el ángulo **BAD**?



9. Carlos tiene una colección de 18 palillos. La colección tiene tres palillos de 1 cm, tres de 2 cm, tres de 3 cm, tres de 4 cm, tres de 5 cm y tres de 6 cm. ¿Cuántos triángulos distintos puede formar Carlos utilizando tres palillos de su colección?

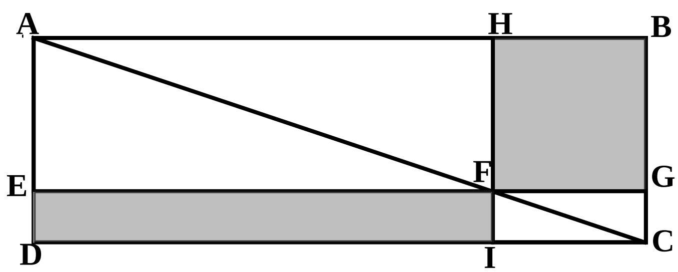
10. Numeré 2010 tarjetas del 1 al 2010 y quité aquéllas que terminaban con 7. Después volví a numerar las que me quedaban y por último quité las que terminaban en 3. Al final, ¿cuántas tarjetas me quedaron?

11. Tenemos una piscina cuadrada rodeada de césped, como muestra el dibujo. Si **P**, **Q**, **R** y **S** son los puntos medios de los lados del cuadrado grande y cada uno de estos lados mide 10 metros, calcula el área de la piscina.



12. Cuando se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ... ¿cuál es el dígito que ocupa la posición 2002? Nota: en la lista anterior el dígito siete (de 17) ocupa la posición 25.

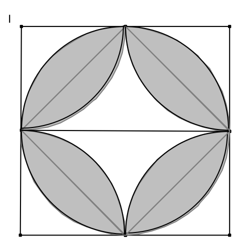
13. La figura **HBGF** es un cuadrado y **AD** = 8 cm. Si área del rectángulo **EFID** es de 36 cm2, ¿Cuál es el área del rectángulo **ABCD**?



14. Una línea de camiones ha decidido premiar con pasaje gratis a todos las personas que la suma de las cifras del número que aparece en su boleto de camión sea 21. La promoción durará sólo por el mes de Marzo, así que mandaron imprimir boletos que van del 1 al 2000. ¿Cuántos boletos de éstos darán pasaje gratis a los usuarios?

15. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Encuentra un número de seis cifras ***abcdef***, de tal manera que el número de tres cifras ***abc*** sea múltiplo de 4, el número de tres cifras ***bcd*** sea múltiplo de 5, el número de tres cifras ***cde*** sea múltiplo de 3 y el número de tres cifras ***def*** sea múltiplo de 11.

16. Calcula el área de la zona pintada, si el lado del cuadrado mayor mide 20 cm. (considera π = 3.14)

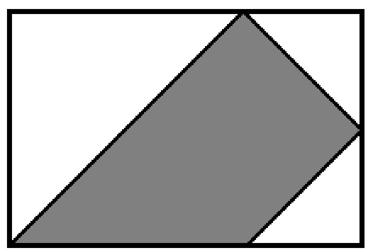


17. Cuatro parejas de novios se reúnen para ir a un concurso de baile. Sabiendo que:

- Beatriz bailó con Eduardo.
- Alicia bailó con el novio de Clara.
- Federico bailó con la novia de Gustavo.
- Daniela bailó con el novio de Alicia.
- Gustavo bailó con la novia de Eduardo.

(a) ¿Con quién bailó Humberto?
(b) Encuentra quiénes son parejas de novios.

18. De uno de los vértices de un rectángulo de 8 X 13 parte una línea recta a 45°. Al tocar el lado del rectángulo, la línea rebota formando nuevamente un ángulo de 45°, como se muestra en la figura, calcula el área de la región gris.

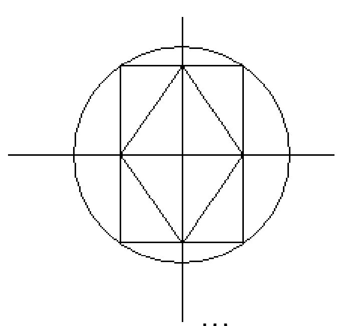


19. ¿Qué fracciones se deben quitar de la suma

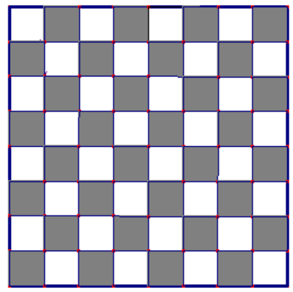
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

para que la suma de las fracciones restantes sea igual a 1? Encuentra todas las posibilidades.

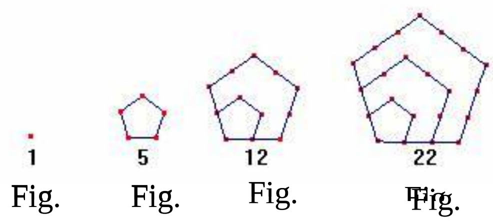
20. En una circunferencia hemos inscrito un rectángulo y en él un rombo, tomando los puntos medios de los lados del rectángulo. Si el diámetro del círculo es de 10 cm, ¿cuánto mide el perímetro del rombo?



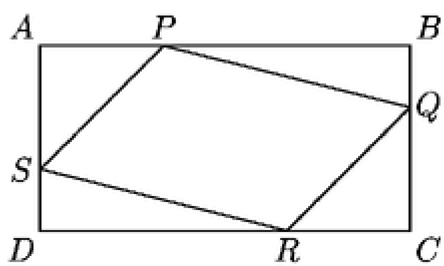
21. Cuántos cuadrados en total hay en la figura (de 1X1, 2X2, 3X3, 4X4, 5X5, 6X6, 7X7, 8X8)?



22. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 35?

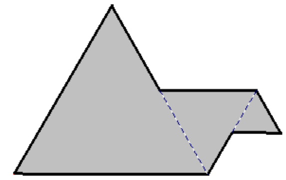


23. En la figura los puntos **P**, **Q**, **R,** y **S** dividen cada lado del rectángulo en razón 1:2. Si **AB** = 21 cm y **BC** = 12 cm ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo **PQRS** y el área de **ABCD**?



24. Ana y Mateo se están repartiendo una bolsa de dulces. Se la van a repartir de la siguiente manera: Primero mateo toma un dulce; Ana toma dos; Mateo toma tres; Ana toma cuatro. Así sucesivamente cada uno toma un dulce más del que tomó el anterior. Ana es la última que toma dulces y la bolsa queda entonces vacía. Ana tiene 20 dulces más que Mateo. ¿Cuántos dulces contenía la bolsa?

25. El triángulo equilátero grande tiene 48 cm de perímetro. El perímetro del segundo triángulo es la mitad de primero y el perímetro del tercero es la mitad del segundo. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?



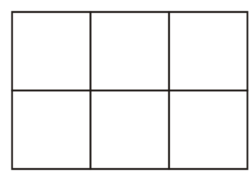
26. Un arqueólogo ha descubierto que una antigua civilización usaba 5 símbolos para representar los números: θ, □, □, ∗, †. Estos símbolos corresponden en algún orden a los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4. Para hacer números más grandes que 4 se empezaban a combinar símbolos, por ejemplo, el número que sigue del 4 es el 10 (el símbolo del uno a la izquierda del símbolo del cero)

El arqueólogo sabe que los siguientes tres números son consecutivos, ordenados de menor a mayor:

∗†□□ , ∗†□θ y ∗†∗† .

Hallar el valor de cada símbolo y cuáles son los tres números consecutivos.

27. La abuela guarda bolsitas de té en una caja con 6 casillas como la que muestra la figura:



Tiene 6 variedades de té: Negro, Verde, Manzanilla, Hierbabuena, Canela y Limón.

Pone cada variedad en una casilla, y nunca pone el Negro y el Verde en las casillas de en medio ni en casillas vecinas.

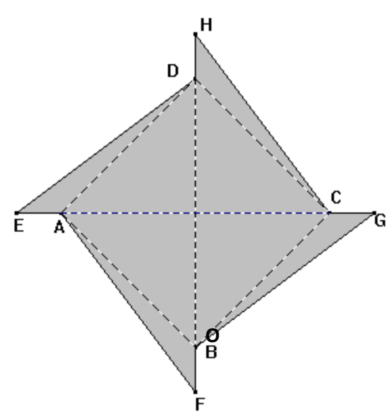
¿De cuántas maneras distintas puede acomodar las 6 variedades de té en la caja?

28. En el cuadrado **ABCD**, las diagonales **AC** y **BD** se cortan en el punto ***O***. Sobre las prolongaciones de las diagonales se marcan los puntos **E**, **F**, **G** y **H** de modo que

OE = **OF** = **OG** = **OH**.

El área del triángulo **BOC** es de 72 cm2 y **OB** = 3/4 **OF**.

¿Cuál es el área de la figura sombreada de vértices **AFBGCHDE**?



29. Marta, Alicia e Erika leyeron un mismo libro de menos de 300 páginas. Marta leyó siete páginas el primer día y el resto a diez páginas por día. Alicia leyó dos páginas el primer día y el resto a once páginas por día. Erika leyó cinco páginas el primer día y el resto a nueve páginas por día. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

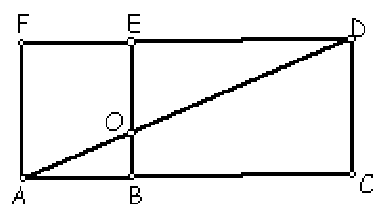
30. Juan tiene 1200 piezas cuadradas de 1 cm de lado. Utilizando todas las piezas arma un rectángulo. ¿Cuántos rectángulos distintos puede armar? Indica las longitudes de sus lados.

¿Cuáles de estos rectángulos se pueden partir en cuadrados de 2 cm de lado?

31. Mi reloj digital marca ciclos de la 1:00 a las 12:59. ¿Durante cuántos minutos al día puedo ver en el reloj un cuadrado perfecto, ignorando los dos puntitos que separan los minutos de las horas?

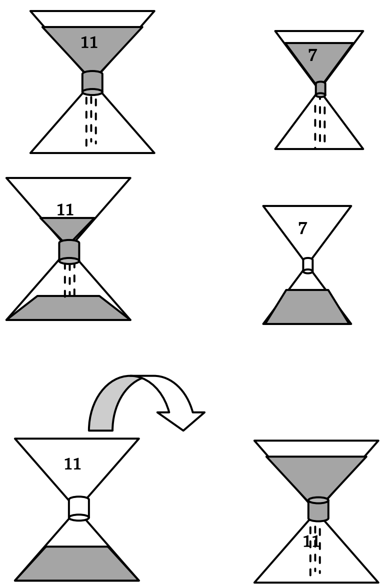
(Por ejemplo, un número cuadrado perfecto es 144, porque $12^2 = 144$).

32. El rectángulo **ACDF** tiene 102 cm de perímetro. **BC** = 24 cm, **CD** = 15 cm y **DO** = 26 cm. El cuadrilátero **BCDO** tiene 70 cm de perímetro. El triángulo **ABO** tiene 30 cm de perímetro. ¿Cuál es el perímetro de **AOEF**?



Soluciones

1. Una forma puede ser la siguiente:

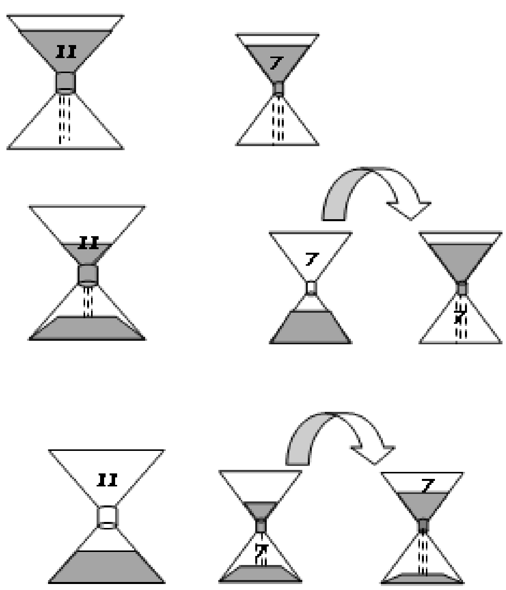


Se Ponen a funcionar los 2 relojes de arena al mismo tiempo.

Cuando se acaba la arena del reloj de 7 minutos, en el de 11 aún quedan 4 minutos. Así que aquí inicia el conteo para los 15 minutos necesarios para cocer el huevo.

Cuando se termina de vaciar la arena del reloj de 11 minutos habrán transcurrido los primeros 4 minutos de cocción del huevo y para completar los 15 que son necesarios, sólo volteamos este mismo reloj para que se vacíe y mida los 11 minutos restantes.

Otra solución:



1. Se colocan los dos relojes al mismo tiempo.

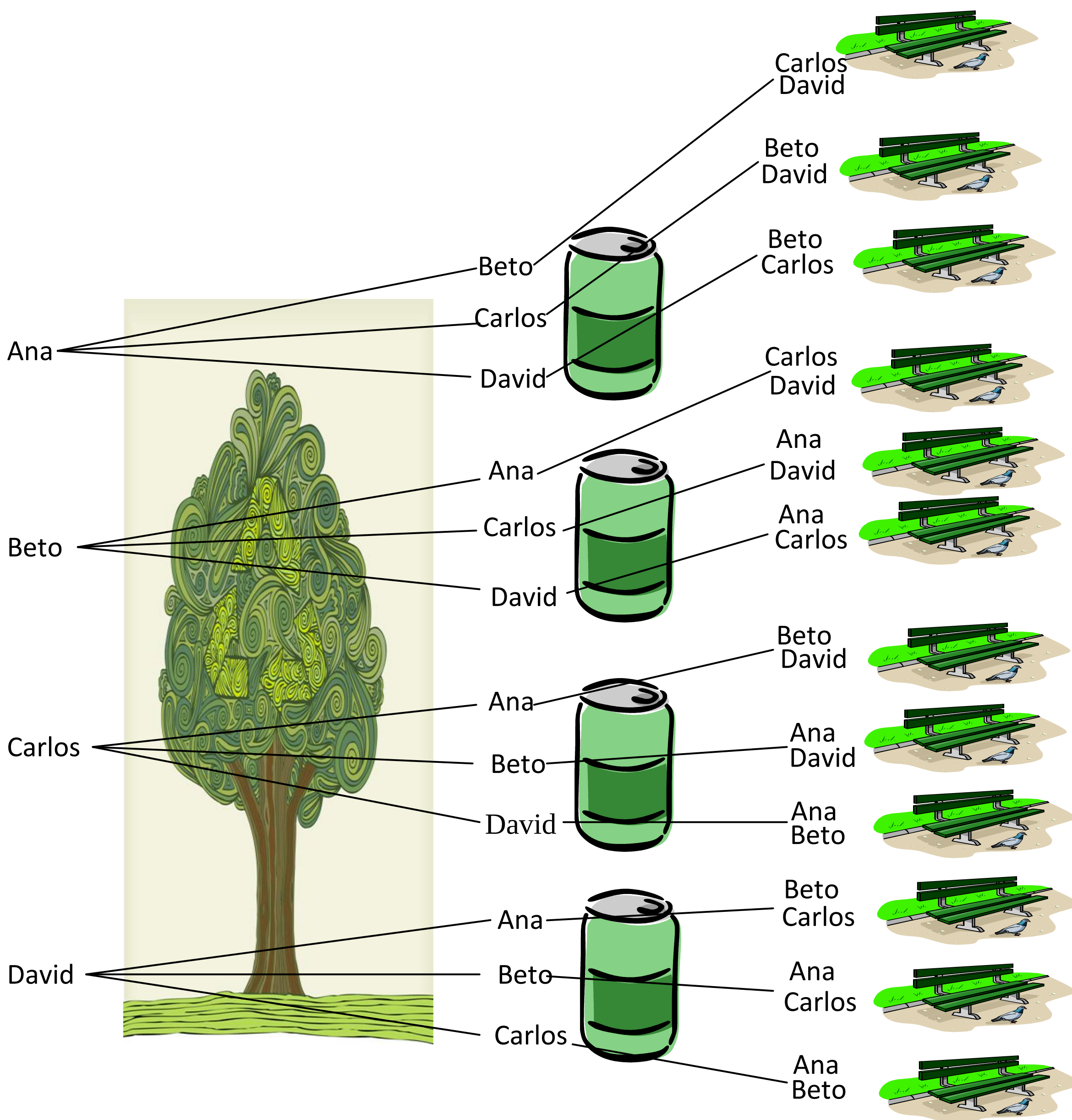
2. Se termina el reloj de 7 minutos y se voltea, para lo cual en el de 11 min le quedan 4 minutos por correr.

3. Se deja que corran los 4 minutos del reloj de 11 y el de 7 desde el principio.

4. Se terminan los 4 minutos del reloj de 11 y se voltea nuevamente el de 7. Al terminar de vaciarse éste último, habrán transcurrido los 15 minutos que se querían medir.

NOTA: COMO HASTA EL COMIENZO DEL PASO 4 HAN TRANSCURRIDO 11 MINUTOS, LOS DEL RELOJ DE 11 Y EN EL RELOJ DE 7 SE HAN CONSUMIDO 4 DE LOS 7 MINUTOS. AL DARLE VUELTA AL DE 7 Y DEJARLO FUNCIONANDO, MEDIRÁ EXACTAMENTE LOS 4 MINUTOS QUE COMPLETAN LOS 15 MINUTOS QUE QUERÍAMOS MEDIR.

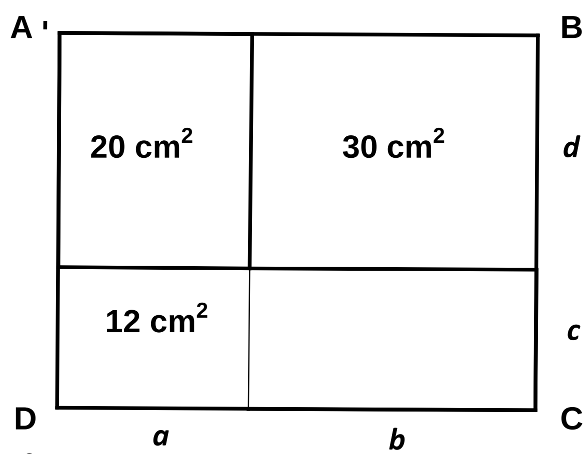
2. Una posible forma es la que sigue: Se tienen 3 escondites posibles (el árbol, el bote y la banca) donde pueden esconderse 4 niños, en el entendido de que en uno de ellos (la banca) caben dos niños. Detrás del árbol puede esconderse cualquiera de los 4 niños, por lo que este puede ocuparse de 4 maneras diferentes. Una vez ocupado el árbol de esas 4 maneras posibles, atrás del bote sólo pueden esconderse cualquiera de los 3 niños restantes, por lo que considerando estas 3 formas de ocupar el bote para cada una de las 4 maneras de ocupar el árbol, se tienen 12 posibles formas diferentes de ocupar el árbol y el bote. Finalmente y tomando en cuenta que dos niños están escondidos uno detrás del árbol y otro atrás del bote, en la banca sólo pueden esconderse los dos niños restantes. Así que la banca puede ocuparse de 1 sola manera. Por lo que las formas distintas de esconderse detrás del árbol, atrás del bote y debajo de la banca son: 3X4X1= 12. Si Ana, Beto, Carlos y David el siguiente diagrama de árbol nos permite determinar éstas maneras:



No.	Detrás del árbol	Atrás del bote	Debajo de la banca
1	Ana	Beto	Carlos y David
2	Ana	Carlos	Beto y David
3	Ana	David	Beto y Carlos
4	Beto	Ana	Carlos y David
5	Beto	Carlos	Ana y David
6	Beto	David	Ana y Carlos
7	Carlos	Ana	Beto y David
8	Carlos	Beto	Ana y David
9	Carlos	David	Ana y Beto
10	David	Ana	Beto y Carlos
11	David	Beto	Ana y Carlos
12	David	Carlos	Ana y Beto

3. Una forma de resolver puede ser la siguiente:

Designemos con ***a***, ***b***, ***c*** y ***d*** las dimensiones de los rectángulos en que está dividido el rectángulo ***ABCD*** del cual se quiere calcular el área. Para ello hay que investigar las medidas ***a, b, c*** y ***d*** sabiendo que ***a x d*** = 20 cm^2, ***b x d*** = 30 cm^2, ***a x c = 12 cm^2*** y ***b x c***= ?.



Como ***a x d*** = 20 cm^2, ***a*** puede ser 20, 1, 10, 2, 5 ó 4 y ***d*** puede ser 1, 20, 2, 10, 4, ó 5, porque 20 X 1 = 1 X 20 = 10 X 2 = 2 X 10 = 5 X 4 = 4 X 5 = 20.

Pero como ***a x c*** = 12 cm^2, de los valores anteriores ***a*** sólo podría ser 2 ó 4, correspondiendo a ***d*** valer 10 ó 5 porque y 2 X 10= 20 4 X 5=20 y a ***c*** 6 ó 3 porque 6 X 2 = 12 y 4 X 3 = 12.

Pero como además ***b x d*** = 30 cm^2, ***b*** sólo puede valer 3 ó 6 correspondientes valores de ***d*** 10 y 5 de tal manera que se cumpla que 3 X 10 = 30 ó 6 X 5 = 30. Así que hay dos posibilidades para las medidas de ***a***, ***b***, ***c*** y ***d***:

1) ***a*** = 2 cm ***b*** = 3 cm ***c*** = 6 cm ***d*** = 10 cm.

En este caso la base del rectángulo ***ABCD*** sería a + b = 2 cm + 3 cm = 5 cm y su altura c + d = 6 cm + 10 cm = 16 cm, por lo que el área del rectángulo sería igual a 5 cm X 16 cm = 80 cm^2.

2) ***a*** = 4 cm ***b*** = 6 cm ***c*** = 3 cm ***d*** = 5 cm.

En esta segunda situación la base del rectángulo ***ABCD*** sería ***a + b = 4 cm + 6 cm = 10 cm*** y su altura ***c + d = 3 cm + 5 cm = 8 cm***, por lo que el área del rectángulo sería igual a 10 cm X 8 cm = 80 cm^2, que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Por lo tanto el área del rectángulo ***ABCD*** es 80 cm^2.

Otra posible forma de abordar la solución del problema es la siguiente:

Si designamos con ***x*** el área del rectángulo de dimensiones b x d, se tenemos que
20 cm^2 = a x d 30 cm^2 = b x d y 12 cm^2 = a x c *x* = b x c

Observemos que $\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{a}{b}\times 1=\frac{a}{b}$ y $\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}\times 1=\frac{a}{b}$

De aquí que $\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{a\times c}{b\times c}$ y entonces $\frac{20\ cm^2}{30 cm^2}=\frac{12 cm^2}{x}$.

Así que $x=\frac{30cm^2\times 12cm^2}{20cm^2}=18cm^2$.

De donde el área del rectángulo ***ABCD*** es igual a

20 cm^2 + 30 cm^2 + 12 cm^2 + 18 cm^2 **= 80 cm^2.**

4. Una manera de resolver el problema es:

Se pide calcular la suma de las cifras del número **N**=10^{92} - 92.

$10^{92}=1000\cdots^{92\ ceros}\cdots 000$, es decir un 1 seguido de 92 ceros, número al que hay que restarle 92 y después sumar las cifras del resultado obtenido.
Podemos simplificar el problema para ver si obtenemos alguna regularidad que nos permita calcular rápidamente la suma solicitada.

$10^2-92=100-92=08$ $10^3-92=1000-92=908$

$10^4-92=10000-92=9908$ $10^5-92=100000-92=99908$

Observemos que en todos los casos en el resultado termina en 08 invariablemente y a la izquierda aparece el 9 tantas veces como el número del exponente (que es igual a la cantidad de ceros que van después del 1) que tiene la potencia de 10 disminuido en dos.

Por ejemplo cuando se trata de $10^2 - 92 = 100 - 92 = 08$, el resultado termina en 08 y a la izquierda tantos nueves como el exponente de la potencia de 10 (en este caso, 2) menos 2, es decir, 2 – 2 = 0 veces, por lo que el 9 no está en el resultado.

En el caso de $10^3 - 92 = 1000 - 92 = 908$, el resultado termina también en 08 y a la izquierda aparecen tantos nueves como el exponente de la potencia de 10 (en este caso, 3) menos 2, es decir, 3 – 2 = 1 veces, por lo que el 9 está 1 vez en el resultado.

Cuando se trata de $10^4 - 92 = 10000 - 92 = 9908$, el resultado nuevamente termina en 08 y a la izquierda aparecen tantos nueves como el exponente de la potencia de 10 (en este caso, 4) menos 2, es decir, 4 – 2 = 2 veces, por lo que el 9 se encuentra 2 veces en el resultado.

Lo mismo sucede con $10^5 - 92 = 100000 - 92 = 99908$: el resultado termina otra vez en 08 y a la izquierda aparecen tantos nueves como el exponente de la potencia de 10 (en este caso, 5) menos 2, es decir, 5 – 2 = 3 veces, por lo que el 9 se repite 3 veces en el resultado.

De lo anterior podemos concluir que en el caso de **N**=10^{92} - 92 se tendrá que

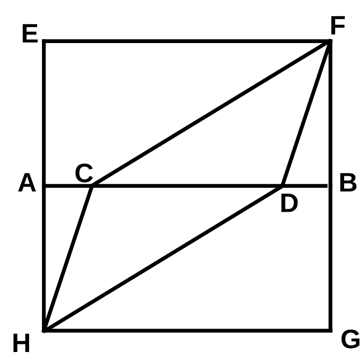
$10^{92} - 92 = 1000 \cdots^{92\ ceros} \cdots 000 - 92 = 999 \cdots^{92-2=90\ nueves} \cdots 99908$, en donde el resultado termina igual en 08 y a la izquierda aparecen tantos nueves como el exponente de la potencia de 10 (en este caso, 92) menos 2, es decir, 92 – 2 = 90 veces, por lo que el 9 se repite 90 veces en el resultado.

Asi que la suma de las cifras del número **N**=10^{92} - 92 se puede calcular de esta forma: 90 X 9 + 0 + 8 = 810 + 0 + 8 = 818.

5. Una posibilidad de resolver el problema es ésta:

El área del cuadrado **EFGH** es 6 X 6 = 36 unidades cuadradas. Como el área del romboide **CFDH**, es la tercera parte de la del cuadrado entonces es de 36÷3=12 unidades cuadradas. Ahora bien, el romboide **CFDH** está compuesto por los triángulos **CFD** y **DHC** que son congruentes por tener la misma base (**CD**) y la misma altura (3 unidades ya que **A** y **B** son puntos medios de los lados del cuadrado y éstos miden 6 unidades), asi que cada uno de ellos tiene un área de 12÷2= 6 unidades cuadradas. El área de ambos triángulos se calcula multiplicando la base (**CD**) por la altura (3) y dividiendo entre 2, es decir A= $\frac{(CD)(3)}{2}$, pero ya sabemos que el área de cada uno de los triángulos es igual a 6 unidades cuadradas, asi que podemos escribir 6= $\frac{(CD)(3)}{2}$ de donde **CD** =$\frac{(6)(2)}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Por lo tanto **CD** mide 4 unidades.



6. Una forma de pensar la solución del problema es como sigue:

Si sacamos al azar 100 canicas, una posibilidad es que las cien fueran del mismo color, pero no es seguro, porque también podría presentarse la posibilidad extrema de extraer exactamente 5 canicas de cada uno de los 20 colores. Si consideramos esta última situación, podemos imaginar en extraer al azar 99 X 20 = 1980 canicas pensando en que la posibilidad extrema para lo que pretendemos (obtener al menos 100 canicas del mismo color) fuera que tuviéramos 99 canicas de cada uno de los 20 colores y afirmar con toda seguridad que en la siguiente extracción habrá al menos 100 canicas de un mismo color.
Entonces el mínimo número de canicas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color es 99 X 20 + 1 = ***1981***.

7. Una manera de resolver el problema es así:

Se tienen 2006 dígitos escritos en línea y el último de ellos a la derecha es el 8. Además cada par de dígitos adyacentes a la izquierda es divisible entre 17 ó entre 23. Se desea conocer los primeros 5 dígitos de la lista.

$\ldots^{2005\ d\acute{\imath}gitos}\ldots 8$

Como cada par de dígitos adyacentes a la izquierda es divisible o bien entre 17 ó entre 23 podemos escribir los múltiplos de 17 y 23 de 2 cifras en una tabla.

MÚLTIPLOS DE 17	MÚLTIPLOS DE 23
17	23
34	46
51	69
68	92
85	

1) Para averiguar cuál es el dígito anterior a 8, observemos que el par formado por este dígito y el 8 debe ser divisible entre 17 ó 23, es decir, buscamos un múltiplo de dos cifras de cualquiera de ellos terminado en 8. En la tabla nos damos cuenta que esto sólo ocurre con 68 que es múltiplo (o divisible entre) de 17. Por lo tanto el **6** es el penúltimo de los 2006 dígitos.

$\ldots^{2004\ d\acute{\imath}gitos}\ldots 68$

2) Podemos razonar de la misma manera para investigar el dígito anterior a 6 y entonces nos interesa un múltiplo de dos cifras de 17 ó 23 terminado en 6. En la tabla

encontramos que sólo el 46, que es múltiplo (o divisible entre) de 23, termina en 6. De aquí que el antepenúltimo dígito de los 2006 dígitos es **4**.

$\ldots^{2003\ dígitos}\ldots 468$

3) Ahora nos concentramos en buscar un múltiplo de dos cifras de 17 ó 23 terminado en 4. Observamos que en la tabla únicamente el 34, que es múltiplo (o divisible entre) de 17, termina en 4. Entonces el anterior dígito a la izquierda de 4 es el **3**.

$\ldots^{2002\ dígitos}\ldots 3468$

4) De forma análoga indagamos en la tabla para encontrar un múltiplo de dos cifras de 17 ó 23 terminado en 3 y observamos sólo el 23, que es múltiplo (o divisible entre) de 23, el tiene esta característica. Así que el anterior dígito a la izquierda de 3 es el **2**.

$\ldots^{2001\ dígitos}\ldots 23468$

5) Razonando igual, buscamos esta vez en la tabla un múltiplo de dos cifras de 17 ó 23 terminado en 2, dándonos cuenta de que sólo el 92, que es múltiplo (o divisible entre) de 23, tiene esta cualidad, por lo que el anterior dígito a la izquierda de 2 es el **9**.

$\ldots^{2000\ dígitos}\ldots 923468$

6) Investigamos nuevamente en la tabla, pero ahora un múltiplo de dos cifras de 17 ó 23 terminado en 9 observando que únicamente el 69, que es múltiplo (o divisible entre) de 23, cumple con esta condición, por lo que el anterior dígito a la izquierda de 9 es el **6**.

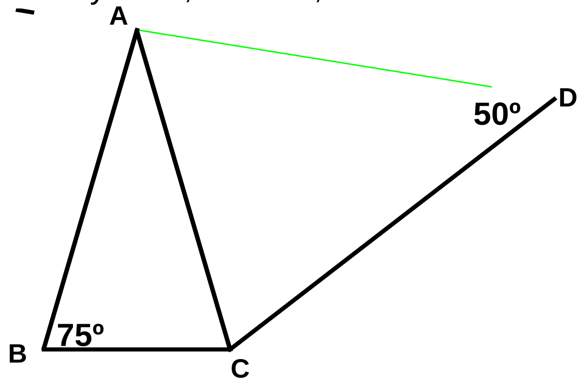
$\ldots^{1999\ dígitos}\ldots 6923468$

7) En este punto nos damos cuenta de que procediendo como hemos venido haciendo, antes de 6 tendría que estar nuevamente el 4; antes del 4, el 3; antes del 3, el 2; antes del 2, el 9; y de aquí en adelante, la secuencia 92346 se repite hasta completar los 2006 dígitos. Es decir, antecediendo al 8, hay 2005 dígitos en secuencias repetidas de 92346, esto es, exactamente 401 secuencias formadas por los dígitos 9, 2, 3, 4, 6. Entonces los primeros cinco dígitos de la lista son justamente 9, 2, 3, 4, 6.

$\mathbf{92346}\ldots^{399\ veces\ \ la\ secuencia\ 92346}\ldots\mathbf{923468}$

8. Una posible solución es la siguiente:

En la figura observamos que el ángulo cuya medida investigamos, ($\measuredangle BAD$) es igual a la suma de los ángulos **CAB** y **CAD**, es decir, $\measuredangle BAD = \measuredangle CAB + \measuredangle CAD$(1).



Ahora bien, como **AB=AC** el triángulo **ACB** es isósceles y el ángulo **BCA** mide igual que el ángulo **ABC**, es decir, 75°. Además como cualquier triángulo la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 180°, tenemos que $\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180°$, pero $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 75°$, entonces podemos escribir:
$\measuredangle CAB + 75° + 75° = 180°$ ó $\measuredangle CAB + 150° = 180°$ y entonces se tiene que

$\measuredangle CAB = 180° - 150° = 30°$

Con un razonamiento podemos concluir que el triángulo ADC también es isósceles (**AD=DC**) y que los ángulos **CAD** y **DAC** tienen la misma medida y dado que también en el triángulo ADC la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 180°, tenemos que:
$\measuredangle CAD + \measuredangle DAC + \measuredangle ADC = 180°$(2), pero $\measuredangle ADC = 50°$ y como $\measuredangle CAD = \measuredangle DAC$ entonces también podemos escribir (2) así:
$\measuredangle CAD$**+**$\measuredangle CAD$**+50°=180°** ó $2\measuredangle CAD + 50° = 180°$, es decir,

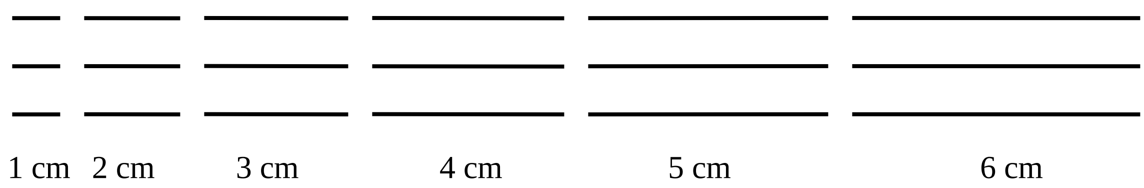
$$\measuredangle CAD = \frac{180° - 50°}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$$

Pero establecimos al principio en (1) que $\measuredangle BAD = \measuredangle CAB + \measuredangle CAD$, por lo que concluimos que

$\measuredangle BAD = 30° + 65° = 95°$

9. Una forma de solucionar el problema es la que sigue:

Un triángulo tiene tres lados. Si se usan tres palillos de la colección, para el primer lado tiene



Utilizando 3 palillos de la misma medida se pueden construir 6 triángulos equiláteros:
(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5) y (6, 6, 6)
Usando dos palillos de la misma medida y uno diferentes se forman las siguientes ternas:

(1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6)
(2, 2, 1), (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (2, 2, 6)
(3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 3, 6)
(4, 4, 1), (4, 4, 2), (4, 4, 3), (4, 4, 5), (4, 4, 6)
(5, 5, 1), (5, 5, 2), (5, 5, 3), (5, 5, 4), (5, 5, 6)
(6, 6, 1), (6, 6, 2), (6, 6, 3), (6, 6, 4), (6, 6, 5)

Con las cuales sólo se pueden construir triángulos isósceles si la suma de las medidas de los dos palillos menores es mayor que la medida del palillo más grande. Así que de las anteriores ternas descartamos (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (2, 2, 6) y (3,3, 6) por no cumplir con esta condición. Entonces con las ternas restantes sólo se pueden construir 21 triángulos isósceles distintos:

(2, 2, 1), (2, 2, 3)
(3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 4), (3, 3, 5),
(4, 4, 1), (4, 4, 2), (4, 4, 3), (4, 4, 5), (4, 4, 6)
(5, 5, 1), (5, 5, 2), (5, 5, 3), (5, 5, 4), (5, 5, 6)
(6, 6, 1), (6, 6, 2), (6, 6, 3), (6, 6, 4), (6, 6, 5)

Es importante observar que con las ternas (2, 2, 1) y (2, 1, 2) se construye de hecho el mismo triángulo, por lo que para que dos ternas permitan construir triángulos diferentes, deben contener, al menos una medida distinta entre ellas.

Usando tres palillos de distintas medidas se forman las siguientes ternas:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6)
(1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6)
(1, 4, 5), (1, 4, 6)
(1, 5, 6)
(2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6)
(2, 4, 5), (2, 4, 6)
(2, 5, 6)
(3, 4, 5), (3, 4, 6)
(3, 5, 6)
(4, 5, 6)

Las ternas que permiten construir triángulos escalenos son:

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)

Entonces es posible construir 7 triángulos escalenos.

Por lo que usando tres palillos de su colección, Carlos puede formar 6 triángulos equiláteros, 21 triángulos isósceles y 7 triángulos escalenos, en total:
6 + 21 + 7 = 34 triángulos distintos:

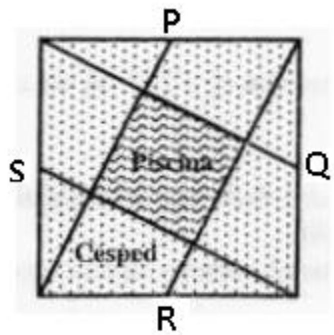
(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6), (2, 2, 1), (2, 2, 3),(3, 3, 1), (3, 3, 2) (3, 3, 4), (3, 3, 5), (4, 4, 1), (4, 4, 2), (4, 4, 3), (4, 4, 5), (4, 4, 6), (5, 5, 1), (5, 5, 2), (5, 5, 3) (5, 5, 4), (5, 5, 6), (6, 6, 1), (6, 6, 2), (6, 6, 3), (6, 6, 4), (6, 6, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6) (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6) y (4, 5, 6).

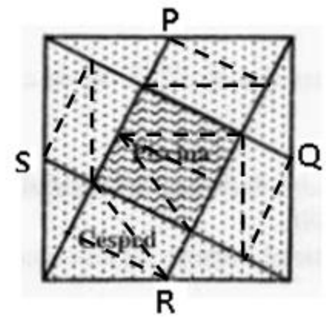
10. Una forma de solución es la siguiente:

Las tarjetas terminan con 7 del 1 al 100 son diez: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87 y 97.
Por lo tanto del 1 al 1000 son cien, por lo que del 1 al 2000 son doscientas tarjetas, más la tarjeta número 2007, dan un total de 201 tarjetas.

Por la que quedan 2010 – 201 = 1809 tarjetas.
Las tarjetas terminadas en 3 del 1 al 100 son diez: 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83 y 93.
Por lo tanto del 1 al 1000 son cien, por lo que del 1 al 1800 son 180 tarjetas, más la tarjeta número 1803, dan un total de 181 un tarjetas.

11. Una posible forma de resolver consiste en imaginar la figura original del cuadrado mayor, descompuesta en 20 pequeños triángulos rectángulos iguales *(congruentes) entre sí, de tal manera que el cuadrado de la piscina estaría compuesto a su vez por cuatro de estos triángulos, es decir la quinta parte de los que tiene el cuadrado mayor. Como el área del cuadrado mayor es 10 m X 10 m = 100 m*^{2}*, y el área del cuadrado de la piscina resulta ser 100 m*^{2} */ 5 = 20 m*^{2}*.*





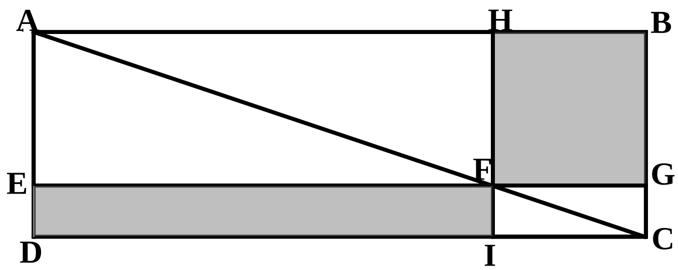
12. Podemos resolver como sigue:

Del 1 al 9 (números de una cifra) son 9 dígitos, del 10 al 99 (números de 2 cifras) son 90 x 2 = 180 dígitos. Llevamos 189 y para el 2010 faltan 1821 dígitos. Como siguen los números de 3 cifras, 1821 entre 3 es igual a 607 números exactamente. Del 100 al 699 van 600 números (1800 dígitos) y con los que se llevaban, van 1800 + 189 = 1989 dígitos en el 699. Con el 705 van 2007 (1989 + 6 x 3) y finalmente, con el ***706*** *van los 2010 dígitos exactos, por lo que el dígito que ocupa la posición 2010 es el* ***6****.*

Otra variante en la solución es:

Veamos que hasta el 17, hay 9 números de 1 dígito y 8 de 2 y el dígito 7 ocupa la posición 25, pero se nos pregunta por el dígito que ocupa la posición 2010. Esto quiere decir que continuando la numeración debemos cubrir 2010 – 25 = 1985 lugares más. Del 18 al 99 hay 82 números de dos dígitos con los cuales se cubrirán otros 82 X 2 = 164 lugares, quedando por cubrir 1985 – 164 = 1821. Del 100 hasta el 999 hay 900 números de tres dígitos, los cuales ocuparían 900 X 3 =2700 lugares, pero sólo faltan por cubrir 1821, así que podemos dividir 1821 entre 3 para ver cuántos de estos 900 números son necesarios: como 607 X 3 = 1821, los siguientes 607 números después del 99 (hasta el 706) cubrirán los siguientes 1821 lugares faltantes, siendo el dígito ***6*** *del 70****6*** *el que ocupa la posición 25 + 164 + 1821 = 2010*

13. Podemos resolverlo así:



De la figura podemos observar que:

Área del Rectángulo EFID + Área del triángulo AFE + Área del triángulo FCI = Área del Cuadrado HBGF + Área del triángulo AHF + Área del triángulo FGC $_{(1)}$.

Sin embargo, se tiene que:

Área del triángulo AFE = Área del triángulo AHF y Área del triángulo AFE = Área del triángulo AHF porque respectivamente son mitades de un mismo rectángulo: AHFG.

Así que de la igualdad $_{(1)}$ podemos concluir que

Área del rectángulo EFID = Área del cuadrado HBGF

Como se sabe que el área del rectángulo EFID es de 36 cm^2, entonces también el área del cuadrado HBGF es igual a 36 cm^2 y por lo tanto su lado BG = 6 cm.
Ahora como AD = BC = 8 cm y

GC = BC – BG resulta que GC = 8 cm – 6 cm = 2 cm

Además

Área del Rectángulo EFID = DI X GC = 36 cm^2
es decir, DI X 2 cm = 36 cm^2 DI = 36 cm^2/ 2 cm DI = 18 cm

también

IC = FG = BG = 6 cm y DC = DI + IC, es decir, DC = 18 cm + 6 cm = 24 cm

Área del Rectángulo ABCD = DC X BC = 24 cm X 8 cm = 192cm^2

14. Una manea de resolverlo sería:

Para determinar cuántos de los 2000 boletos darán pasaje gratis a los usuarios, necesitamos encontrar todos los números del 1 al 2000 que dan 21 al sumar sus dígitos. Podemos proceder así:
Si ordenamos los 2000 boletos del número menor al mayor, del 1 al 9 hay 9 números de 1 dígito de éstos el mayor es el 9 por lo que ninguno de ellos será premiado. Los siguientes 90 números tienen 2 dígitos siendo el más grande 99. Como la suma de sus dígitos es 9 + 9 = 18, ninguno de éstos tampoco será premiado.

Del 100 al 999 se tienen 900 números de 3 dígitos. Para saber cuántos de ellos darán pasaje gratis a sus portadores, tenemos que determinar cuántas ternas de dígitos suman 21.

Las ternas de dígitos que suman 21 son:

399, 489, 579, 588, 669, 678,777.

3, 9, 9 con la que se forman 3 números distintos: 399, 939 y 993.
4, 8, 9 con la que se forman 6 números distintos: 489, 498, 849, 894, 948 y 984.
5, 7, 9 con la que se forman 6 números distintos: 579, 597, 759, 795, 957 y 975.
5,8,8 con la que se forman 3 números: 588, 858 y 885.
6,6, 9 con la que se forman 3 números: 669, 696 y 966.
6, 7, 8 con la que se forman 6 números distintos: 678, 687, 768, 786, 867 y 876.
7, 7, 7 con la que se forma únicamente el número 777.

Es decir, de los novecientos boletos que hay del 100 al 999, 3 + 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 =28, no pagarán boleto.

Finalmente del 1000 al 2000, tenemos 1001 números de 4 dígitos. Determinamos entonces las cuartetas que suman 21:

1, 2, 9, 9 con la que se forman 3 números distintos menores o iguales que 2000: 1299, 1929 y 1992.
1, 3, 8, 9 con la que se forman 6 números distintos menores o iguales que 2000: 1389, 1398, 1839, 1893, 1938 y 1983.
1, 4, 8, 8 con la que se forman 3 números distintos menores o iguales que 2000: 1488, 1848 y 1884.
1, 4, 7, 9 con la que se forman 6 números distintos menores o iguales que 2000: 1479, 1497, 1749, 1794, 1947 y 1974.
1, 5, 6, 9 con la que se forman 6 números distintos menores o iguales que 2000:
1569, 1596, 1659, 1695, 1956 y 1965.

1, 5, 7, 8 con la que se forman 6 números distintos menores o iguales que 2000: 1578, 1587, 1758, 1785, 1857 y 1875.
1, 5, 8, 8 con la que se forman 3 números distintos menores o iguales que 2000: 1588, 1858 y 1885.
1, 6, 7, 7 con la que se forman 3 números distintos menores o iguales que 2000: 1677, 1767 y 1776.
Es decir, de los 1001 boletos que hay del 999 al 2000, 3 + 6 + 3 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3 =36, no pagarán pasaje.

De lo anterior podemos concluir que de los 2000 boletos sólo 28 + 36 = 64 son los premiados.

Otra forma de pensar la solución es la siguiente:

Del 1 al 300, no hay números cuyos dígitos suman 21.
Del 301 al 400, hay 1 número: 399.
Del 401 al 500, hay 2 números: 489 y 498.
Del 501 al 600, hay 3 números: 579, 597 y 588.

Continuando de la misma manera, del 901 al 1000 hay 7 de estos números: 939, 948, 957, 966, 975, 984 y 993.

Es decir, del 1 al 1000, en total se tienen 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 números con esta característica.

Del 1001 al 1200 no tenemos números cuyos dígitos suman 21.
Del 1201 al 1300, hay 1 número: 1299.
Del 1301 al 1400, hay 2 números: 1389 y 1398.
Del 1401 al 1500, hay 3 números: 1479, 1488 y 1497.

Continuando de igual forma, del 1901 al 2000 hay 8 de estos números: 1929, 1938, 1947, 1956, 1965, 1974, 1983 y 1992.

Esto es, del 1001 al 2000, en total se tienen 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 números con esta característica.

Así que de los 2000 boletos 28 + 36 = 64 no pagarán pasaje.

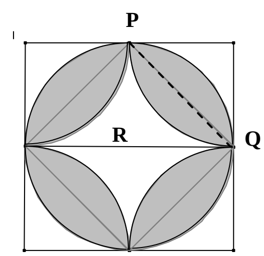
15. Podríamos resolverlo así:

El número de tres cifras bcd debe ser múltiplo de 5, por lo que d = 5, ya que un múltiplo termina en 0 ó en 5, pero como abcdef se forman solamente con 1, 2, 3, 4, 5 y 6, la única posibilidad para d es 5.

Ahora bien, 5ef debe ser múltiplo de 11, es decir, se trata de un múltiplo de 11 entre 500 y 600: 506, 517, 528, 539, 550, 561, 572, 583 y 594. De éstos sólo 561 es plausible ya que todos los demás contienen algún dígito diferente del conjunto propuesto: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. De esta manera, e = 6 y f = 1.

Por otra parte, c56 debe ser múltiplo de 3, esto es, la suma c + 5 + 6, tiene que ser múltiplo de 3. Como c únicamente puede ser 2, 3 y 4, c = 4, porque 4 + 5 + 6 = 15 que es múltiplo de 3, en tanto que 2 + 5 + 6 y 3 + 5 +6 no lo son.
Finalmente como ab4 debe ser múltiplo de 4, b4 tiene que ser también múltiplo de 4, así que b = 2 porque 24 sí es múltiplo de 4 mientras que 34, no. Y como sólo queda disponible el dígito 3, éste debe corresponder necesariamente al valor de a.
Entonces el número abcdef buscado es: 324561.

16. Una solución podría ser:



Observemos que la octava parte de la zona pintada resulta de restar a la cuarta parte del círculo el área del triángulo PQR.
El área de la cuarta parte del círculo es
$(3.14 \text{ X } 10^2) / 4 = 314 / 4 = 78.5$ cm^2.

El área del triángulo PQR resulta ser en la figura la octava parte del área del cuadrado de lado 20 cm, es decir, (20 X 20) / 8 = 400 / 8 = 50 cm^2.

Así que la octava parte de la zona pintada es igual 78.5 – 50 = 28.5 cm^2.
Finalmente el área de toda la zona pintada es igual 8 X 28.5 = 228 cm^2.

17. Una forma de resolver el problema puede ser ésta:

Hacemos dos tablas de doble entrada: la primera para investigar las posibles parejas de baile y la segunda para determinar las posibles parejas de novios, y las vamos a ir llenando con un SÍ o con un NO a partir de las informaciones que dan los 5 enunciados expresados en el problema. Está claro que una vez que estén completas, la primera tabla nos permitirá contestar la pregunta del inciso a) y la segunda, la del inciso b).

El primer enunciado afirma que Beatriz y Eduardo fueron pareja de baile por lo que, por lo tanto, Beatriz no bailó con Federico, con Gustavo ni con Humberto; de igual manera Eduardo no pudo haber bailado con Alicia, con Clara ni con Daniela y la tabla de parejas de baile queda así:

PAREJAS DE BAILE	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	SÍ	NO	NO	NO
Federico	NO			
Gustavo	NO			
Humberto	NO			

El quinto enunciado afirma que Gustavo bailó con la novia de Eduardo, así que Beatriz no puede ser novia de Eduardo por haber bailado con él y no con Gustavo. El segundo enunciado dice que Alicia bailó con el novio de Clara, pero Alicia no bailó con Eduardo así que Clara no puede ser novia de Eduardo. El cuarto enunciado afirma que Daniela bailó con el novio de Alicia, pero Daniela no bailó con Eduardo, luego Alicia tampoco puede ser novia de Eduardo. De lo anterior se tiene que la novia de Eduardo no puede ser más que Daniela y entonces ni Beatriz, ni Alicia, ni Clara pueden ser novias de Eduardo, de la misma forma que ni Federico, ni Gustavo, ni Humberto pueden ser novios de Daniela. Así que la tabla de parejas de novios queda así:

PAREJAS DE NOVIOS	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	NO	NO	NO	SÍ
Federico				NO
Gustavo				NO
Humberto				NO

De nuevo en el quinto enunciado se asegura que Gustavo bailó con la novia de Eduardo y entonces Gustavo bailó con Daniela y de esto se desprende que Gustavo no bailó ni con Alicia, ni con Clara y que Daniela tampoco lo hizo con Federico, ni con Humberto; en el cuarto enunciado dice que Daniela bailó con el novio de Alicia y esto significa que Gustavo es novio de Alicia y entonces Gustavo no es novio ni de Beatriz, ni de Clara como tampoco Alicia es novia de Federico, ni de Humberto. Luego las dos tablas quedan:

PAREJAS DE BAILE	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	SI	NO	NO	NO
Federico	NO			NO
Gustavo	NO	NO	NO	SÍ
Humberto	NO			NO

PAREJAS DE NOVIOS	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	NO	NO	NO	SÍ
Federico		NO		NO
Gustavo	NO	SÍ	NO	NO
Humberto		NO		NO

En el tercer enunciado se asevera que Federico bailó con la novia de Gustavo, pero Alicia es la novia de Gustavo, entonces resulta que Federico bailó precisamente con Alicia y no lo hizo con Clara, así como Alicia tampoco lo pudo haber hecho con Humberto. Además en el segundo enunciado se afirma que Alicia bailó con el novio de Clara y como Alicia bailó con Federico, entonces Federico es el novio de Clara con lo que Federico no es novio de Beatriz ni Clara es novia de Humberto. Si registramos las informaciones anteriores en las dos tablas quedan así:

PAREJAS DE BAILE	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	SI	NO	NO	NO
Federico	NO	**SÍ**	**NO**	NO
Gustavo	NO	NO	NO	SÍ
Humberto	NO	**NO**		NO

PAREJAS DE NOVIOS	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	NO	NO	NO	SÍ
Federico	**NO**	NO	**SÍ**	NO
Gustavo	NO	SÍ	NO	NO
Humberto		NO	**NO**	NO

Por último de las tablas se puede ver que Humberto sólo pudo haber bailado con Clara y ser novio de Beatriz. Así que las respuestas son: Humberto bailó con Clara y las parejas de novios son: Eduardo y Daniela, Gustavo y Alicia, Federico y Clara y Humberto y Beatriz.

Las tablas completas son:

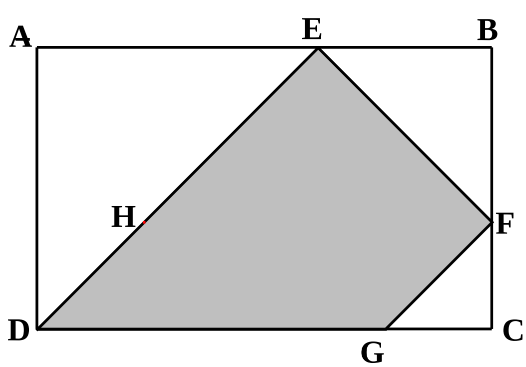
PAREJAS DE BAILE	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
Federico	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**
Gustavo	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**
Humberto	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**

PAREJAS DE NOVIOS	Beatriz	Alicia	Clara	Daniela
Eduardo	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**
Federico	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
Gustavo	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**
Humberto	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**

18. Una manera de resolver el problema consiste en pensar el área de la región gris como la diferencia del área del rectángulo ABCD menos las áreas de los triángulos AED, EBF y FCG. El área del rectángulo es de 104 unidades cuadradas. Para investigar el área de los triángulos debemos observar primero que éstos son rectángulos en A, B y C (son vértices del rectángulo) y además isósceles (Dado que los ángulos ADE, BEF y CFG son los ángulos de rebote a 45o: en el triángulo AED, $<EAD+<ADE+<DEA=180$ es decir, $90+<45+<DEA=180$ y entonces $<DEA=<ADE=45°$. De forma análoga para los triángulos BEF y CFG). Si los triángulos mencionados son isósceles, resulta que el segmento AD es igual al segmento AE y éste medirá 8 unidades; el segmento EB es igual al segmento BF y su medida es 13 unidades – 8 unidades = 5 unidades y el segmento FC es igual al segmento GC con medida 8 unidades – 5 unidades = 3 unidades. Así que:

El área del triángulo ADE es igual a 8 unidades X 8 unidades / 2 = 32 unidades cuadradas.
El área del triángulo BEF es igual a 5 unidades X 5 unidades / 2 = 12.5 unidades cuadradas.
El área del triángulo CFG es igual a 3 unidades X 3 unidades / 2 = 4.5 unidades cuadradas.
Y finalmente el área de la región gris es igual a 104 – (32 + 12. 5 + 4.5) = 104 – 49 = 55 unidades cuadradas.

También podemos calcular el área solicitada es así: si trazamos el segmento HF paralelo al segmento DC el área de la región gris es igual a la suma de las áreas del cuadrilátero HFGD y el triángulo EHF, como se aprecia en la figura de abajo:



: Sin embargo, resulta que el cuadrilátero HFGD es un paralelogramo puesto que

1. *El lado HF, por construcción, es paralelo a su lado opuesto DG y*
2. *El lado DH también lo es a su lado opuesto GF porque los ángulos GFH y FHE son correspondientes e iguales entre sí (ambos miden 45^o): el ángulo GFH es alterno interno con el ángulo FGC entre los segmentos paralelos HF y DG cortados por el segmento transversal GH por lo que son iguales entre sí, con medida 45^o (es fácil ver el ángulo FGC*

mide 45^o: en el triángulo CFG, $< \square\square\square + < \square\square\square + < \square\square\square = 180°$, pero el ángulo CFG es uno de los ángulos del rectángulo y CFG es el ángulo de rebote, es decir, $90 + < 45 + < \square\square\square = 180°$ y entonces $< \square\square\square = < \square\square\square = 45°$) y el ángulo FHE es correspondiente al ángulo GDH entre los mismos segmentos paralelos cortados por el segmento transversal GF y entonces los dos también son iguales entre sí, con medida 45^o (también no es difícil observar que GDH mide 45^o: $< \square\square\square + < \square\square\square = < \square\square\square$, pero el ángulo HDA es el ángulo de rebote y el ángulo GDA es uno de los ángulos del rectángulo, es decir, $45 + < \square\square\square = 90°$ y entonces $< \square\square\square = 45°$).

Ahora bien como los triángulos AED, EBF y FCG son rectángulos e isósceles (A, B y C son vértices de los triángulo y también del rectángulo y los ángulos ADE, BEF y CFG son los ángulos de rebote a 45^o: en el triángulo AED, por ejemplo, $< \square\square\square + < \square\square\square + < \square\square\square = 180$ es decir, $90 + < 45 + < \square\square\square = 180$ y entonces $< \square\square\square = < \square\square\square = 45°$. De forma análoga se puede mostrar para los triángulos BEF y CFG), AB = CD = 13 unidades, AE = BC = AD = 8 unidades, EB = BF = AB – AE = 13 unidades – 8 unidades = 5 unidades, FC = GC = BC – BF = 8 unidades – 5 unidades = 3 unidades y DG = CD – GC = 13 unidades – 3 unidades = 10 unidades.

Por otra parte el paralelogramo HFGD tiene como base la medida del segmento DG = 10 unidades y como altura la medida del segmento FC = 3 unidades así que su área es igual a 10 X 3 = 30 unidades cuadradas.
Además el triángulo EHF tiene base igual a la medida del segmento HF = DG = 10 unidades y altura igual a la medida del segmento BF = 5 unidades por lo que su área es igual a 10 unidades X 5 unidades / 2 = 25 unidades cuadradas.

Por último el área de la región gris es igual 30 unidades cuadradas + 25 unidades cuadradas = 55 unidades cuadradas.

19. Podríamos proceder así:

Si obtenemos fracciones con un común denominador (120), para que la suma de las fracciones originales sea igual a 1 la suma de los nuevos numeradores debe también ser igual a 120.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square\square} = \frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} + \frac{\square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square+\square\square+\square\square+\square\square+\square\square+\square\square+\square\square}{\square\square\square} = \frac{\square\square\square}{\square\square\square}$$

Los nuevos numeradores son: $60, 40, 30, 20, 15, 12$ y 10 y las combinaciones de éstos que suman 120 son:

- Tomando dos numeradores, ninguna de las 21 combinaciones posibles suma 120
  (60, 40), (60, 30), (60, 20), (60, 15), (60, 12), (60, 10), (40, 30), (40, 20), (40, 15), (40, 12), (40, 10), (30, 20), (30, 15), (30, 12), (30, 10), (20, 15), (20, 12), (20, 10), (15, 12), (15, 10), (12, 10);
- Tomando 3 numeradores, sólo 1 de las 35 combinaciones posibles suma 120

  (60, 40, 30), (60, 40, 20), (60, 40, 15), (60, 40, 12), (60, 40, 10), (60, 30, 20), (60, 30, 15), (60, 30, 12), (60, 30, 10), (60, 20, 15), (60, 20, 12), (60, 20, 10), (60, 15, 12), (60, 15, 10), (60, 12, 10), (40, 30, 20), (40, 30, 15), (40, 30, 12), (40, 30, 10), (40, 20, 15), (40, 20, 12), (40, 20, 10), (40, 15, 12), (40, 15, 10), (40, 12, 10), (30, 20, 15), (30, 20, 12), (30, 15, 10), (30, 15, 12), (30, 15, 10), (30, 12, 10), (20, 15, 12), (20, 15, 10), (20, 12, 10) y (15, 12, 10)

- Tomando 4 numeradores sólo 1 de las 35 combinaciones posibles suma 120

  (60, 40, 30, 20), (60, 40, 30, 15), (60, 40, 30, 12), (60, 40, 30, 10), (60, 40, 20, 15), (60, 40, 20, 12), (60, 40, 20, 10), (60, 40, 15, 12), (60, 40, 15, 10), (60, 40, 12, 10), (60, 30, 20, 15), (60, 30, 20, 12), (60, 30, 20, 10), (60, 30, 15, 12), (60, 30, 15, 10), (60, 30, 12, 10), (60, 20, 15, 12), (60, 20, 15, 10), (60, 20, 12, 10), (60, 15, 12, 10), (40, 30, 20, 15), (40, 30, 20, 12), (40, 30, 20, 10), (40, 30, 15, 12), (40, 30, 15, 10), (40, 30, 12, 10), (40, 20, 15, 12), (40, 20, 15, 10), (40, 20, 12, 10), (40, 15, 12, 10), (30, 20, 15, 12), (30, 20, 15, 10), (30, 20, 12, 10), (30, 15, 12, 10), (20, 15, 12, 10)

- Tomando 5 numeradores ninguna de las 21 combinaciones posibles suma 120;

  (60, 40, 30, 20, 15), (60, 40, 30, 20, 12), (60, 40, 30, 20, 10), (60, 40, 30, 15, 12), (60, 40, 30, 15, 10), (60, 40, 30, 12, 10), (60, 40, 20, 15, 12), (60, 40, 20, 15, 10), (60, 40, 20, 12, 10), (60, 40, 15, 12, 10), (60, 30, 20, 15, 12), (60, 30, 20, 15, 10), (60, 30, 20, 12, 10), (60, 30, 15, 12, 10), (60, 20, 15, 12, 10), (40, 30, 20, 15, 12), (40, 30, 20, 15, 10), (40, 30, 20, 12, 10) (40, 30, 15, 12, 10), (40, 20, 15, 12, 10), (30, 20, 15, 12, 10)

- Tomando 6 numeradores ninguna de las 7 combinaciones posibles suma 120

  (60, 40, 30, 20, 15, 12), (60, 40, 30, 20, 15, 10), (60, 30, 20, 15, 12, 10), (40, 30, 20, 15, 12), (40, 30, 20, 15, 10), (40, 20, 15, 12,10), (30, 20, 15, 12, 10).

- y finalmente la única combinación posible tomando los 7 numeradores obviamente no suma 120
  (60, 40, 30, 20, 15, 12)

Por lo que sólo hay dos posibilidades: 60 + 40 + 30 = 120 y 60 + 30 + 20 + 10 = 120

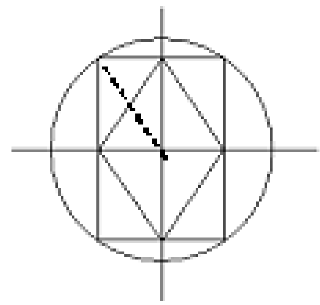
a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, así que las fracciones a quitar de la suma original serían:

$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ y $\frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$ y en este caso se tendrían que quitar de la suma original las fracciones: $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{10}$

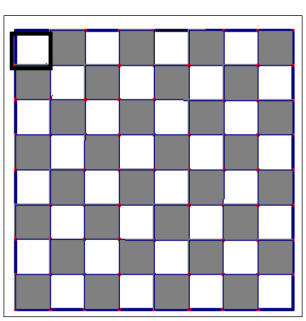
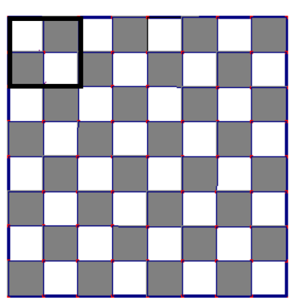
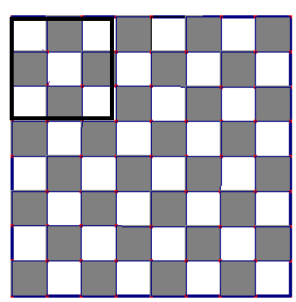
20. Una forma de resolverlo puede ser la siguiente:

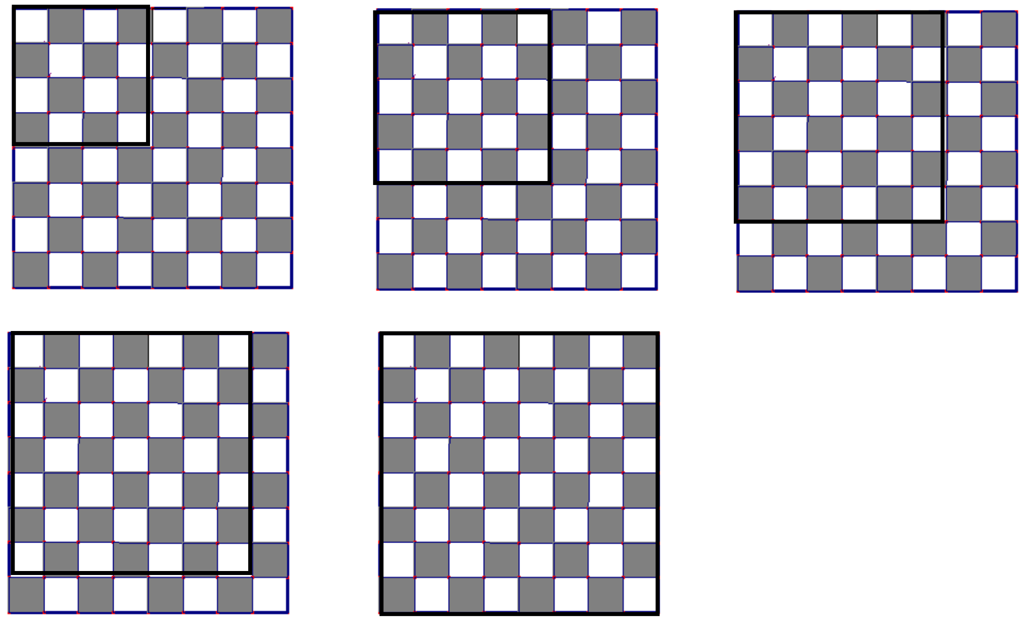
Notemos que el segmento punteado es el radio del círculo por lo que su longitud es igual a la mitad de la longitud del diámetro, es decir, 5 cm. Notemos también que este segmento punteado tiene igual longitud del lado del rombo, puesto que ambos son diagonales de un mismo rectángulo. De aquí que el perímetro del rombo es igual 4 X 5 cm = 20 cm.



21. Podría resolverse de esta manera;

Si contamos los cuadrados de 1X1, éstos son 64; si contamos los de 2X2 son 49; los de 3X3 son 36; los de 4X4 son 25; los de 5X5, son 16; los de 6X6 son 9; los de 7X7 son 4 y l de 8X8 es sólo 1. En total 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1=$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$ = 204.
En las figuras de abajo, el cuadrado de 1X1 podemos dibujar en 8 veces hacia la derecha y 8 hacia abajo, en total 8X8 veces. Análogamente el cuadrado de 2X2 se puede dibujar 7 veces hacia la derecha y otras 7 hacia abajo, en total 7X7 veces. De la misma manera podemos hacer con los cuadrados de 3X3, 4X4, 5X5, 6X6, 7X7 y 8X8.



22. Una primera forma muy elemental de resolver que podría seguirse consiste en observar que la cantidad de puntos necesarios para la figura 2 aumenta en 4 en relación con la figura1; en la figura 3 aumenta 7 respecto a la figura 2; de la figura 3 a la figura 4 aumenta 10; es decir, los incrementos se dan según la sucesión 4, 7, 10, 13. … la cual aumenta de 3 en 3. Esto significa que si la figura 4 tiene 22 puntos para la figura 5 se necesitarán 22 + 13 = 35 puntos, para la figura 6, se requerirán 35 + 15 = 50 puntos y si continuamos de esta forma hasta la figura 35 concluiremos que se necesitarán 1820 puntos.

Otra manera de resolver es ver las cantidades de puntos necesarios para cada figura así: Cada figura se forma agregando a la anterior el siguiente múltiplo de 3 disminuido en 2 unidades como se muestra en la tabla

Figura	***Puntos***	***Secuencia de formación***	***Secuencia de formación interpretada como múltiplos de 3 disminuidos en 2 unidades.***	***Simplificación de la secuencia de formación***
1	***1***	***1***	***3(1) – 2***	***3(1) – 2 (1)***
2	***5***	***1 + 4***	***3(1) – 2 + 3(2) – 2***	***3(1+2) – 2(2)***
3	***12***	***1 + 4 + 7***	***3(1) – 2 + 3(2) – 2 + 3(3) – 2***	***3(1+2+3) – 2(3)***
4	***22***	***1 + 4 + 7 + 10***	***3(1) – 2 + 3(2) – 2 + 3(3) – 2 + 3(4) - 2***	***3(1+2+3+4) – 2 (4)***
35	***¿?***	***1 + 4 + 7 + … + 102***	***3(1) – 2 + 3(2) – 2 + 3(3) – 2 + 3(4) – 2 + … + 3(35) – 2***	***3(1+2+3+…+34 +35) – 2(35) =1820***

Del último renglón de la tabla podemos observar que los puntos necesarios para formar la figura 35 son 1820.

También podemos resolver escribiendo el número de puntos de cada figura como los puntos de la figura anterior más los puntos que se incrementan y observar la secuencia de formación que aparece:

(1)= (1)
(1 + 1 + 3)= (2 + 3(1)) = 2 + 3(1)
(1 + 1 + 3 + 1 + 3 + 3)= (3 + 3(1) + 3(2)) = 3 + 3(1+2)
(1 + 1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3) = 4 + 3(1) + 3(2) + 3(3)) = 4 + 3(1+2+3)
.
.
.
(1 + 1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + …) =35 + 3(1) + 3(2) + 3(3) + 3(4) + … + 3(34)= 35 + 3(1 + 2 +3 + 4 + ….+34) = 35 + 3(595) = 35 + 1785 = 1820 que son los puntos con los que se formará la figura 35.

23. Una forma de resolverlo ser

El área del rectángulo ABCD es igual 12 cm X 21 cm =252 cm^2.

El área del paralelogramo PQRS es igual al área del rectángulo ABCD menos las áreas de los triángulos APS, PBQ, QCR y SRD. Se tiene que:

Área del triángulo APS = (AP)(AS)/2
Área del triángulo PBQ = (PB) (BQ)/2
Área del triángulo QCR = (RC)(QC)/2
Área del triángulo SRD = (DR)(SD)/2

Ahora bien, AP es la mitad de PB, pero como AP + PB = AB = 21 cm, entonces AP = 7 cm y PB = 14 cm, análogamente RC = 7 cm y DR = 14 cm.
También, SD es la mitad de AS y como SD + AS = AD = 12 cm, entonces SD = 4 cm y AS = 8 cm. De manera similar BQ = 4 cm y QC = 8 cm. De aquí se observa que los cuatro triángulos tienen áreas iguales a 28 cm^2.
Con lo que podemos concluir que el área del paralelogramo PQRS = 252 cm^2 – 4(28 cm^2) = 252 cm^2 – 112 cm^2 = 140 cm^2.
Así que cociente entre el área del paralelogramo PQRS y el área de ABCD es 140 cm^2 / 252 cm^2 = 5 / 9 ≈ 0.55

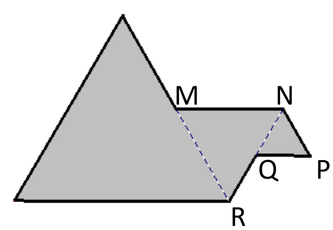
24. De acuerdo con las reglas para tomar los dulces, podemos escribir el reparto hecho en una tabla y registrar además la diferencia de dulces que hay entre Ana y Mateo en cada tomada y la diferencia acumulada.

Tomadas	*1ª*	*2ª*	*3ª*		*19ª*	*20ª*
Ana	*2*	*4*	*6*	*…*	*38*	*40*
Mateo	*1*	*3*	*5*	*…*	*37*	*39*
Diferencia cada vez	*1*	*1*	*1*	*…*	*1*	*1*
Diferencia acumulada	*1*	*2*	*3*	*…*	*19*	*20*

En la tabla vemos que el número de tomadas coincide con la diferencia acumulada, de aquí que si al final Ana tiene 20 dulces más que Mateo, significa que las veces que tomaron dulces uno y otro fueron también 20 y podemos concluir que a Mateo le tocaron 1 + 3 + 5 + …+ 37 + 39 = 400 dulces mientras que a Ana le correspondieron 2 + 4 + 6 + … + 38 + 40 = 420 dulces. Así que en la bolsa había 400 + 420 = 820 dulces.

Si se observa, la cantidad de dulces que había en la bolsa se determina a partir de lo que le tocó a Mateo y a Ana, esto es: (1 + 3 + 5 + …+ 37 + 39) + (2 + 4 + 6 + … + 38 + 40) = 1 + 2 + 3 + … + 39 + 40 = 820 dulces. Como se ve se trata en realidad de la suma de todos los números naturales consecutivos desde el 1 hasta el 40. Esta suma se puede calcular también, pero de forma más rápida, multiplicando el último número de la suma (40) por el siguiente (41) y dividiendo entre 2: (40 X 41) / 2 = 820. [1)]

25. Una manera de pensar la solución del problema puede ser la siguiente: el perímetro de la figura sombreada es igual a la suma del perímetro triángulo grande (MN = MR) y las longitudes uno de los lados del triángulo mediano (NP = NQ) y uno del triángulo pequeño. Como el perímetro del triángulo mediano es la mitad del grande, su lado mide: 24 / 3 = 8 cm. El perímetro del triángulo pequeño es la mitad del mediano, entonces su lado mide 12 / 3 = 4 cm. Así que el perímetro de la figura sombreada es igual a: 48 + 8 + 4 = 60 cm.



26. Una forma de resolverlo podría ser:

Hay que observar que como los tres números son consecutivos y las correspondencias de los símbolos son con los números 0, 1, 2, 3 y 4, los símbolos □, θ, † (símbolos con los que terminan estos números) podrían representar las ternas*:*

A) 0, 1 y 2;
B) 1, 2 y 3
C) 2, 3 y 4
D) 3, 4, 0
E) 4, 0, 1

Analicemos que tendría que ocurrir con la escritura de los tres números consecutivos en cada uno de estos cinco casos:

A) Si el primero de los tres números consecutivos terminara en cero, el segundo terminaría en 1 y el tercero terminaría en 2. Como las unidades en cada uno de ellos se podrían escribir con símbolos simples del sistema de numeración, el segundo símbolo de los números consecutivos no se afectaría. Entonces en los tres números consecutivos el segundo de sus símbolos tendría que ser el mismo.
B) Si el primer número consecutivo terminara en 1, el segundo terminaría en 2 y el tercero en 3. De igual forma que el caso anterior, el segundo símbolo de los números consecutivos no sería afectado porque las unidades podrían ser escritas con los símbolos simples. Entonces en los tres números consecutivos el segundo de sus símbolos igual, tendría que ser el mismo.
C) Si el primer número consecutivo terminara en 2, el segundo terminaría en 3 y el tercero en 4. Nuevamente las unidades podrían ser escritas con los símbolos simples y el segundo símbolo de los números consecutivos. Entonces en los tres números consecutivos el segundo de sus símbolos tendría que ser el mismo también.
D) Si el primer número consecutivo terminara en 3, el segundo terminaría en 4 y el tercero en 0. Como del segundo al tercer número consecutivo hay que pasar de 4 al siguiente número, en el sistema de numeración éste se tendría que escribir: 10. Lo anterior implica que el segundo símbolo del primero y segundo números consecutivos no se afectaría, pero el del tercero sí, por la necesidad de escribir el siguiente de 4 como 10, quedando 0 como su última cifra y el 1 sumado al valor del segundo de sus símbolos. Entonces en los primeros 2 números consecutivos el segundo de sus símbolos tendría que ser el mismo, pero sería diferente en el tercero de ellos.
E) Si el primer número consecutivo terminara en 4, el segundo terminaría en 0 y el tercero en 1. Como del primero al segundo número consecutivo hay que pasar de 4 al siguiente número, en el sistema de numeración éste se tendría que escribir también: 10. Esto último implica, de manera similar al caso anterior, que del primero al segundo número consecutivo habría un cambio en el segundo símbolo y que éste último, ya modificado, permanecería sin cambio al pasar del segundo al tercer número consecutivo. Entonces en los 2 últimos números consecutivos el segundo de sus símbolos sería el mismo, pero sería diferente en el primero de ellos.

Si examinamos la escritura de los tres números consecutivos encontrada por el arqueólogo, la única posibilidad para la terminación de los números es la del inciso D, esto es, los números tendrían que terminar en 3, 4 y 0. Así que el símbolo ▯ corresponde a 3, θ corresponde a 4 y † corresponde necesariamente a 0. Para definir qué símbolos corresponden a 1 y 2, podemos observar que el símbolo del rectángulo grande ▯ no puede valer 2 porque al pasar del segundo al tercer número consecutivo, el 1 de 10, que es el siguiente de 4 en el sistema de numeración, se tendría que sumar a su valor y se convertiría en 3, pero 3 se corresponde con ▯ (rectángulo pequeño) y éste tendría que ser el segundo símbolo en el tercer número consecutivo en lugar de *, que es finalmente el que aparece. Así que el símbolo * corresponde a 1 y el símbolo ▯ (rectángulo grande) corresponde a 2.

Finalmente los tres números consecutivos en el sistema de numeración antiguo son:

✱†□□ = 2013, ✱†□θ = 2014 y ✱†✱† = 2020

27. Para resolver de alguna forma, comencemos acomodando primero los sabores que *tienen restricción: tanto el té negro como el verde sólo pueden ir en las 4 casillas de la esquina. Si empezamos poniendo el té negro, por ejemplo, existen 4 formas para hacerlo, justamente las cuatro esquinas de la caja:*

N		

		N

		N

N		

Acomodado el negro, si enseguida hacemos lo mismo con el verde y dado que no puede ir de vecino con el negro, para cada una de las cuatro posibilidades del negro, sólo podemos ponerlo en dos de las tres esquinas restantes:

N		*V*

V		*N*

		V
N		

V		
		N

N		
		V

		N
V		

V		*N*

N		*V*

Por lo tendríamos 4 X 2 = 8 maneras de acomodar el té negro y el té verde.

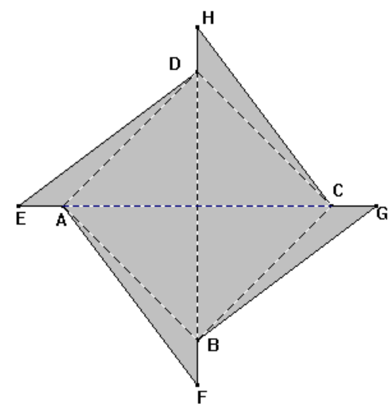
Como los demás sabores no tienen restricciones de acomodo, ocupados dos de los 6 espacios disponibles en la caja, el siguiente sabor, por ejemplo, manzanilla, para cada uno de los ocho acomodos del negro y del verde tendría 4 formas distintas de ponerse, es decir, serían en total 8 X 4 = 32 maneras diferentes de colocar juntos los sabores negro, verde y manzanilla.

Ocupados tres de los 6 lugares de la caja, para el siguiente sabor por ejemplo, hierbabuena, para cada uno de los 32 acomodos del negro, verde y manzanilla, se tendrían 3 formas diferentes de acomodarlo, o sea, 32 X 3 = 96 maneras distintas de poner juntos estos 4 sabores.

Puestos ya cuatro sabores en cuatro de los 6 espacios disponibles en la caja, para cada uno de los 96 acomodos distintos, el siguiente sabor, por ejemplo, canela, tendría nada más 2 maneras de colocarse, en total 96 X 2 = 192 formas diferentes de poner 5 sabores juntos.

Finalmente ocupados 5 de los 6 lugares de la caja, para cada uno de los 192 acomodos únicamente queda 1 forma de acomodar el último sabor, por ejemplo, limón. Por lo que los seis sabores juntos se pueden poner de 192 X 1 = 192 maneras distintas.

28. Podemos resolverlo de esta manera:



El área de la figura sombreada es igual al área de los cuatro triángulos DOE, HOC, GOB, FOA, cuyas bases y alturas son: (OD y OE), (OC y OH), (OB y OG) y (AO y OF) respectivamente. Pero OD = OC = OB = AO por ser mitades de las diagonales del cuadrado ABCD.

Y dado que también *OE* = OF = OG = OH, los cuatro triángulos tienen igual área y entonces es suficiente calcular el área de uno de ellos, el GOB, por ejemplo, y multiplicarla por cuatro para determinar el área de la figura sombreada. Así que: $A_{AFBGCHDE} = 4(A_{GOB}) = 4(OB)(OG) / 2$.

Determinemos la base del triángulo GOB. Puesto que se sabe que el triángulo BOC tiene área igual a 72 cm^2, significa que (OC)(OB) / 2 = 72 cm^2, luego (OC)(OB) =(72 cm^2)(2) = 144 cm^2, pero como OC = OB entonces podemos escribir:

(OC)(OC) = 144 cm^2 y de aquí concluir que OC = OB = 12 cm.
Para encontrar la altura del triángulo GOB, recordemos que OB = OC = 12 cm es 3 / 4 de OF. Esto es,

3 / 4 OF = 12 cm y entonces OF = (4)(12) / 3 = 48 / 3 = 16 cm

Con la base y la altura del triángulo GOB, podemos calcular su área:
$A_{GOB} = (12)(16) / 2 = 192 / 2 = 96\ cm^2$

Finalmente como $A_{AFBGCHDE} = 4(A_{GOB})$ se sigue que
$$A_{AFBGCHDE} = 4(96\ cm^2) = 384\ cm^2 .$$

Así que el área de la figura sombreada es igual a 384 cm^2.

1) En realidad lo que se aplica es la conocida fórmula para encontrar la suma de números naturales consecutivos desde 1 hasta n (descubierta según la tradición, por Federico Gauss en su niñez):
S = n (n + 1) / 2

29. Podemos comenzar a resolver escribiendo en una tabla las páginas del libro *que llevaban leídas las niñas día con día:*

Días / *Niñas*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*…*
Marta	*7*	*17*	*27*	*37*	*47*	*…*
Alicia	*2*	*13*	*24*	*35*	*46*	*…*
Érika	*5*	*14*	*23*	*32*	*41*	*…*

Al ir llenando la tabla nos darnos cuenta, por las páginas que va leyendo Marta, que el número de páginas del libro debe ser necesariamente un número terminado en 7. Por lo tanto, podemos concentrar la búsqueda en los múltiplos de 11 menores que 300 terminados en 5, porque 5 + 2= 7 (dado que el número de páginas del libro termina en 7 y las páginas leídas el primer día por Alicia fueron 2 y en los días sucesivos siempre fueron 11) y en los múltiplos de 9 menores que 300 terminados en 2, porque 2 + 5 (las cinco páginas leídas inicialmente por Érika y las 9 de cada uno de los días posteriores).

Los múltiplos de 11 menores que 300 terminados en 5 son: 11 X 5 = 55, 11 X 15 = 165 y 11 X 25 = 275 y las posibles páginas del libro son: 57, 167 y 277.

Los múltiplos de 9 menores que 300 terminados en 2 son: 9 X 8 = 72, 9 X 18 = 162 y 9 X 28 = 252. Las posibles páginas del libro son: 77, 167 y 257.

La única coincidencia dada en el número de páginas es en 167. Si a este número le restamos 7 (las páginas leídas por Marta el primer día) resulta 160, que es un múltiplo de 10 (las que páginas que fue leyendo diariamente a partir del segundo día).

Entonces resulta ser que el libro tiene 167 páginas y fue leído por Marta en 17 días, por Alicia en 16 días y por Érika en 19.

30. Una posible forma de resolver es:

a) Como todos los rectángulos distintos que se pueden armar con las 1200 piezas cuadradas tienen la misma área, justamente 1200 piezas cuadradas, podemos probar números para las distintas bases y alturas de los rectángulos, cuyo producto sea el área dada. En una tabla queda:

Base	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Altura	*1200*	*600*	*400*	*300*	*240*
Área	*1200*	*1200*	*1200*	*1200*	*1200*

Base	*6*	*8*	*10*	*12*	*15*
Altura	*200*	*150*	*120*	*100*	*80*
Área	*1200*	*1200*	*1200*	*1200*	*1200*

Base	*16*	*20*	*24*	*25*	*30*
Altura	*75*	*60*	*50*	*48*	*40*
Área	*1200*	*1200*	*1200*	*1200*	*1200*

Aquí llevamos 15 rectángulos distintos. Si ahora intercambiamos las medidas de las bases y las alturas, obtenemos otros 15 rectángulos, que dan un total de 30, aunque en realidad se trata de los mismos 15 rectángulos obtenidos en la tabla a los cuales se les gira 90 grados. Se tienen 15 rectángulos distintos si no se considera la posición de la figura y 30, tomándola en cuenta.

b) Para que los rectángulos se puedan partir en cuadrados de 2 cm de lado, tanto las base como la alturas deben ser múltiplos de 2 por lo que las dimensiones de tales rectángulos son: (2, 600), (4, 300), (6, 200), (8, 150), (10, 120), (12, 100), (20, 60), (24, 50) y (30, 40), 9 en total.

31. Razonemos así:

Si ignoramos los dos puntitos en el reloj digital es posible ver los números entre 100 y 1259, excepto los comprendidos del 160 a 199, del 260 a 299, ..., del 1060 al 1099 y del 1160 al 1199, porque las dos últimas cifras son los minutos y éstos aparecen en el reloj digital únicamente hasta el 59.

Los números cuadrados que se tienen entre 100 y 1259 son:

100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225.

Pero por lo que se dijo antes y dado que el día tiene 24 horas, sólo estarían visibles durante dos minutos en el día cada uno: 100, 121, 144, 225, 256, 324, 400, 441, 529, 625, 729, 841, 900, 1024, 1156, 1225. En total podemos ver un número cuadrado en el reloj digital durante 2 X 16 = 32 minutos.

32. Podemos proceder así:

El perímetro del trapecio AOEF es igual a la suma de las longitudes de los segmentos FA, FE, EO y AO.

Comencemos calculando cada una de estas longitudes. Puesto que ACDF es un rectángulo FA = CD = 15 cm por ser las longitudes de lados opuestos. Enseguida AC = (102 – 2 (15)) / 2 = (102 – 30) / 2 = 72 / 2 = 36 cm. Luego FE = AB = AC – BC = 36 – 24 = 12 cm.

Por otra parte la longitud del segmento OB se obtiene restando al perímetro del cuadrilátero BCDO las longitudes de los segmentos DO, DC y BC, esto es: OB = 70 – (26 + 15 + 24) = 70 – 65 = 5 cm. Y como EO = DC – OB entonces EO = 15 – 5 = 10 cm. Además AO se puede obtener restando al perímetro del triángulo ABO las longitudes de los segmentos AB y OB, es decir, AO = 30 – (12 + 5) = 30 – 17 = 13 cm.

Sólo queda sumar las longitudes calculadas para obtener el perímetro solicitado:

P_{AOEF} = FA + FE + EO + AO = 15 + 12 + 10 + 13 = 50 cm